Universidad Simón Bolívar
Preparadurías de Matemáticas I (MA1111)
Preparador: Ricardo J. Fernández Terán (RicharOrange@hotmail.com)

SOLUCIONES EXPLICADAS DEL SEGUNDO EXAMEN PARCIAL (40%)

SEPTIEMBRE-DICIEMBRE 2012 **Todos los tipos (A-E) iguales**

1. Calcular si existen los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

b) $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^3+x-1}-\sqrt{x^2-3x}}{3x+2}$

c) $\lim_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{(x+1)^2}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-x\right)$

Solución:

a) $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{\sin x\,(1-\cos^2 x)}{x^3\cos x\,(1+\cos x)}\right.$$

$$\left.=\frac{\sin^3 x}{x^3\cos x\,(1+\cos x)}\right]=1\cdot\frac{1}{1(2)}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Demidovich, Nº 233 – ¡Asignado en la prepa!

b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3+x-1}-\sqrt{x^2-3x}}{3x+2}$$

$$\xRightarrow{\boldsymbol{y:=-x}}\lim_{y\to\infty}\left[\frac{\sqrt[3]{-2y^3-y-1}-\sqrt{y^2+3y}}{2-3y}=\frac{\sqrt[3]{-\dfrac{2y^3}{y^3}-\dfrac{y}{y^3}-\dfrac{1}{y^3}}-\sqrt{\dfrac{y^2}{y^2}+\dfrac{3y}{y^2}}}{\dfrac{2}{y}-\dfrac{3y}{y}}\right]=\frac{\sqrt[3]{-2}-1}{-3}=\mathbf{\frac{\sqrt[3]{2}+1}{3}}$$

c) $$\lim_{x\to-1}\left[\frac{3x^2+x-2}{(x+1)^2}=\frac{(3x-2)(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{3x-2}{x+1}\right]=-\frac{5}{0}\ \xRightarrow{\textbf{Evaluar límites laterales}}$$

$$=\begin{cases}\lim_{x\to(-1)^-}\dfrac{3x-2}{x+1}=\dfrac{-5}{0^-}=+\infty\\[2ex]\lim_{x\to(-1)^+}\dfrac{3x-2}{x+1}=\dfrac{-5}{0^+}=-\infty\end{cases}\quad\therefore\ \nexists\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{(x+1)^2}$$ (Los límites laterales son distintos)

d) $$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+3x-2}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x-2}+x}{\sqrt{x^2+3x-2}+x}=\frac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x-2}+x}=\frac{\dfrac{3x}{x}-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}}+\dfrac{x}{x}}\right]=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

En resumen: *a*) $=\mathbf{\frac{1}{2}}$ *b*) $=\mathbf{\frac{\sqrt[3]{2}+1}{3}}$ *c*) $=\nexists$ *d*) $=\mathbf{\frac{3}{2}}$

2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \leq 2 \\ ax - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$, hallar los valores de las constantes a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

<u>**Solución:**</u>

La función es automáticamente derivable (y por lo tanto continua) por estar definida a través de polinomios en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Su dominio es $\mathbb{R}$, luego el único punto singular donde hay que esudiar la continuidad y derivabilidad es en $x = 2$:

<u>Condición de Derivablidad (*igualdad de las derivadas laterales*):</u>

$$[2x - a = a]_{x=2} \to \quad 4 - a = a \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a = 2}$$

<u>Condición de Continuidad (*existencia e igualdad de los límites laterales con el valor de la función*):</u>

$$\begin{cases} [x^2 - ax = ax - b]_{x=2} \to \quad 4 - 2a = 2a - b \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{b = 4} \\ \qquad\qquad f(2) = 4 - 2a \end{cases}$$

Así, las constantes pedidas serán: $\boldsymbol{a = 2}$ y $\boldsymbol{b = 4}$

<u>**NOTA:**</u> No era estrictamente necesario calcular la derivada por definición. El resultado **DEBE** ser igual al anterior.

3. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(5, 9)$ y son tangentes a la gráfica de la función $y = x^2$

<u>**Solución:**</u>

En primer lugar, notemos que el punto $(5, 9)$ NO está en la curva $y = x^2$, con lo que NO podemos evaluar directamente y aplicar el procedimiento para hallar la recta tangente de forma directa. Sin embargo, sabemos que el punto de tangencia pertenece a ambas curvas: a la gráfica de $y = x^2$ y a una recta que pasa por $(5, 9)$, es decir, se cumple que $\begin{cases} y - 9 = m(x - 5) \\ y = x^2 \end{cases}$, y como la recta debe ser tangente entonces $m = 2x$ (la función derivada), luego:

$$\begin{cases} y - 9 = 2x(x - 5) \\ y = x^2 \end{cases} \Longrightarrow \quad x^2 - 9 = 2x^2 - 10x \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 10x + 9 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Así, construyo las rectas tangentes:

$$\begin{cases} l_1 \equiv y - f(1) = f'(1)(x - 1) \\ l_2 \equiv y - f(9) = f'(9)(x - 9) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} l_1 \equiv y - 1 = 2(x - 1) \\ l_2 \equiv y - 81 = 18(x - 9) \end{cases}$$

Respuesta: $\begin{cases} \boldsymbol{l_1 \equiv y - 1 = 2(x - 1)} \\ \boldsymbol{l_2 \equiv y - 81 = 18(x - 9)} \end{cases}$

4. Calcular (sin simplificar) la expresión para la derivada de las siguientes funciones:

a) $h(x) = \dfrac{x \sin 2x}{1 + x^2}$ ***b***) $g(x) = \cos^2\left(\sqrt{x} + 2x^4\right)$

Solución:

$$\boldsymbol{h'(x) = \frac{(2x\cos 2x + \sin 2x)\left(1 + x^2\right) - (2x)(x \sin 2x)}{(1 + x^2)^2}}$$

$$\boldsymbol{g'(x) = -2\cos\left(\sqrt{x} + 2x^4\right) \cdot \sin\left(\sqrt{x} + 2x^4\right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 8x^3\right)}$$

NOTA: También es correcto si simplificó $g'(x) = 2\sin\left[2\left(\sqrt{x} + 2x^4\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 8x^3\right)$ por identidad de ángulo doble.

¡Éxito!